EXERCICE№11

1) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x+1}{x}\right)$; $f = v \circ u$ avec $\begin{cases} u(x) = \frac{\pi x+1}{x} \\ v(x) = \cos x \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = \pi$ et $\lim\limits_{x \to \pi} v(x) = -1$ d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{\sqrt{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

3) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin(x^2)}{x}$; on pose $X = x^2$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin(x^2)}{x} = \lim\limits_{X \to 0^+} \frac{\sin X}{\sqrt{X}} = \lim\limits_{X \to 0^+} \sqrt{X}.\frac{\sin X}{X} = 0$ (0 · 1)

EXERCICE№12 $f(x) = \frac{1-\cos x}{x}$

1) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ d'où : $\lim\limits_{x \to 0} f(\sin x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(1-\cos x) = 0$ car $\lim\limits_{x \to 0} (1-\cos x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

EXERCICE№13

1) pour $x \neq 0$; $0 \leq |\sin(\frac{2}{x})| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |x|.|\sin(\frac{2}{x})| \leq |x| \Rightarrow |f(x)| \leq |x|$

$\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

2) pour $x \neq 0$; $-1 \leq \sin(\frac{2}{x}) \leq 1 \Rightarrow -x^2 \leq x^2.\sin(\frac{2}{x}) \leq x^2$

$\Rightarrow 1-x^2 \leq 1+x^2.\sin(\frac{2}{x}) \leq 1+x^2$

$\lim\limits_{x \to 0}(1-x^2) = \lim\limits_{x \to 0}(1+x^2) = 1$ d'où : $\lim\limits_{x \to 0} 1+x^2 \sin(\frac{2}{x}) = 1$

3) pour $x > 0$; $\sin(\frac{2}{x}) \geq -1 \Rightarrow \frac{1}{x} + \sin(\frac{2}{x}) \geq \frac{1}{x} - 1 \Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{x} - 1$

$\lim\limits_{x \to 0^+}(\frac{1}{x} - 1) = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

pour $x < 0$; $\sin(\frac{2}{x}) \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq \frac{1}{x} + 1$

$\lim\limits_{x \to 0^-}(\frac{1}{x} + 1) = -\infty$ d'où $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$; par suite f n'admet pas de limite en 0

Qarray.tn Agra Blech- Qarray.tn